Язык физики как язык интервалов и замыканий

К онтологии синтаксиса физических утверждений

Алексей Алексеевич Неклюдов

(Alexey A. Nekludoff)

AstraVerge Research

E-mail: an@astraverge.org
ORCID: 0009-0002-7724-5762

7 Января 2026

Аннотация

В статье предлагается онтологический сдвиг в синтаксисе физического описания: первичным типом физического утверждения объявляется не точечное значение величины, а интервал допустимости. Числа трактуются как эффекты замыкания (и/или стабилизации) интервалов в рамках конкретных процедур фиксации. Переопределяются понятия параметра, закона, квантования, константы и измерения. Показано, что интервальная онтология языка не отменяет существующие уравнения и численные предсказания, но меняет статус числа: из онтологического факта в эпистемический след замыкания.

Замечание 1. *Интервальный синтаксис, предложенный в настоящей работе, совместим с онтологическими программами, рассматривающими реальность как последовательность дискретных актов или событий (см., например, [5]).*

Ключевые слова: интервалы, замыкание, синтаксис физики, измерение, параметры, константы, квантование.

Содержание

1. Введение

В настоящей работе предлагается онтологический сдвиг в языке физического описания, касающийся не конкретных теорий, уравнений или моделей, а базового типа физических утверждений. Речь идёт не о пересмотре эмпирических результатов и не о замене существующих формализмов, а о переопределении того, *что именно считается элементарным фактом физического языка.*

В традиционном синтаксисе физики таким фактом выступает числовое значение величины. Интервалы, допуски и области допустимости при этом рассматриваются как вторичные эпистемические добавления: следствие ограничений измерений, шумов или несовершенства приборов. Число, напротив, наделяется онтологическим статусом и трактуется как непосредственное выражение физической реальности.

В данной работе предлагается альтернативная онтология синтаксиса, в которой первичным объектом физического утверждения является не число, а *интервал допустимости.* Числовые значения рассматриваются как производные эффекты — следствия операций замыкания и фиксации, осуществляемых в рамках конкретных измерительных, вычислительных или режимных процедур.

Важно подчеркнуть, что предлагаемый подход не отрицает корректность классических уравнений, численных предсказаний и вычислительных методов. Он не вводит новых физических сущностей и не требует модификации экспериментальной практики. Изменяется лишь статус числа: из онтологического факта оно переходит в эпистемический след стабилизации допустимой области.

Мотивация такого сдвига носит прагматический характер. Современная физика и инженерная практика всё чаще сталкиваются с задачами, в которых:

- параметры заданы диапазонами, а не точками;
- режимы важнее средних значений;
- корректность вывода определяется устойчивостью последствий, а не точностью отдельных чисел;
- полная дискретизация параметрического пространства приводит к вычислительной неразрешимости.

В этих условиях точечный синтаксис оказывается не столько неверным, сколько недостаточно выразительным. Он скрывает операции замыкания и стабилизации, которые фактически выполняются в каждой реальной задаче, и тем самым порождает псевдопроблемы, связанные с онтологизацией чисел, дискретности и точечных состояний.

Цель данной работы состоит в том, чтобы сделать эти операции явными и сформулировать минимальный формализм, в котором физические утверждения изначально выражаются через допустимые области, а числа возникают как вторичный, контекстнозависимый результат.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. Сначала фиксируется базовый принцип интервального языка и анализируется традиционный точечный синтаксис. Затем вводится новый тип утверждения, минимальный набор формальных примитивов и алгоритмическая схема анализа последствий. Отдельное внимание уделяется вычислительным аспектам, матрицному представлению конечных множеств условий и ограничениям точечного отображения. В заключительной части обсуждается роль замыкания в возникновении чисел и квантования, а также переопределяются ключевые понятия физического языка.

2. Базовый принцип

> Физические величины не задаются точками. Они задаются интервалами допустимости, а числа возникают как эффекты замыкания интервалов.

Речь идёт не об "учёте погрешностей" и не о статистическом сопровождении точечных значений, а о смене базового синтаксиса: интервал выступает первичным носителем физического утверждения, тогда как точка—производным следом процедуры фиксации.

3. Традиционный синтаксис физических утверждений

В стандартной практике физического описания (далее — *точечный синтаксис*) физические величины формулируются в виде точечных численных равенств, например:

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}, \quad e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}, \quad g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}.$$

Результаты измерений и вычислений при этом, как правило, сопровождаются указанием погрешности или статистического доверительного интервала, выражающего надёжность полученного численного значения и условия его воспроизводимости.

Важно отметить, что в рамках данного синтаксиса интервальные оценки не рассматриваются как первичная форма физического утверждения. Напротив, они интерпретируются как вторичные характеристики, отражающие:

- ограничения измерительных приборов;
- стохастические флуктуации и шум;
- несовершенство методик измерения и обработки данных.

В результате точечное численное значение приобретает онтологический статус, тогда как интервал допустимости рассматривается как эпистемическое сопровождение, не принадлежащее самому физическому факту. Физическая величина отождествляется с числом, а интервальная структура допускается лишь как внешняя мера неопределённости, подлежащая минимизации.

4. Новый базовый тип утверждения

В предлагаемом языке (далее: *интервальный язык*) базовое утверждение имеет вид:

$$x \in \mathcal{I}(x)\,,$$

где $\mathcal{I}(x)$—интервал (или, в общем случае, допустимая область) реализаций величины x в заданном контексте.

Определение 1 (Интервал допустимости). *Интервалом допустимости величины x называется множество $\mathcal{I}(x) \subseteq \mathbb{R}$ значений, совместимых с условиями реализации, наблюдения и фиксации в данном контексте.*

Замечание 2. *Слово "интервал" здесь следует понимать широко: в простейшем случае это отрезок $[x^-, x^+]$, но в более общем виде—любой допустимый "коридор" значений (включая многомерные области для векторных величин).*

4.1. Правила формирования дискретных параметров

В рамках рассматриваемого подхода физические параметры не предполагаются априори непрерывными. Вместо этого каждый параметр задаётся как конечное множество допустимых значений, определяемое через операционально различимую шкалу.

Определение. Параметр g определяется как отображение

$$g : \{k_{\min}, \ldots, k_{\max}\} \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{R},$$

где $\Delta > 0$ — фиксированный шаг параметра, соответствующий минимальной различимой единице шкалы. В дальнейшем для определённости полагается $\Delta = 0.01$.

Множество допустимых значений параметра g имеет вид

$$G := \{g(k) \mid k = k_{\min}, \ldots, k_{\max}\},$$

и является конечным и полностью заданным.

Замечание. Множество G не рассматривается как дискретизация непрерывного интервала $[g(k_{\min}), g(k_{\max})]$. Напротив, именно множество G и задаёт полное пространство допустимых значений параметра в рамках модели. Значения, не принадлежащие G, не являются физически различимыми и не входят в область определения параметра.

Такое задание параметра исключает неявные предположения о непрерывности, гладкости или существовании значений "между" соседними элементами множества G. Любые уточнения шкалы параметра допускаются только как локальная аналитическая процедура, обусловленная структурой отображения в пространстве критериев, и не изменяют исходного определения параметра.

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим параметр g, интерпретируемый как ускорение свободного падения. В рамках принятой шкалы различимости с шагом $\Delta = 0.01$ параметр g задаётся конечным множеством

$$G = \{9.78,\ 9.79,\ 9.80,\ 9.81,\ 9.82\}.$$

Данное множество G полностью определяет область допустимых значений параметра g в модели. Числовые значения, не принадлежащие G, такие как 9.782 или 9.805, не рассматриваются как физически различимые и не входят в область определения параметра. Соответственно, любые вычисления критериев или режимов, зависящих от g, выполняются исключительно для элементов множества G.

Такое задание параметра исключает необходимость апелляции к непрерывному интервалу и позволяет формулировать гарантии и оценки непосредственно на конечном пространстве условий.

4.2. Минимальный набор примитивов

В данном разделе фиксируется минимальный набор формальных примитивов, необходимых для работы с моделями, в которых аргументом является не отдельное значение, а множество допустимых условий. Набор намеренно удерживается минимальным: не эстетически завершённым, а достаточным для корректного анализа.

1. Множество условий как первичный объект

Аксиома 1 (Онтологическая). *Базовым объектом анализа является не точка x, а множество допустимых условий*

$$X \subseteq \mathcal{U},$$

где $\mathcal{U}$ — универсальное пространство условий. Точка $x \in \mathcal{U}$ рассматривается как частный случай множества.

Данное положение фиксирует приоритет множеств условий над их точечными представлениями и является необходимым для дальнейших построений.

2. Отображение множеств

Примитив P1 (образ множества). Пусть задано отображение

$$f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}.$$

Ему сопоставляется оператор образа множества

$$F(X) := \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Оператор F рассматривается как первичный объект, а не как формальное расширение отображения f с точек на множества.

3. Аппроксимации образа

Поскольку точное вычисление $F(X)$ в общем случае недостижимо, вводится пара сопряжённых операторов аппроксимации.

Примитив P2 (верхняя аппроксимация).

$$\overline{F}(X) \supseteq F(X).$$

Примитив P3 (нижняя аппроксимация).

$$\underline{F}(X) \subseteq F(X).$$

Наличие обеих аппроксимаций является принципиальным: отсутствие верхней аппроксимации ведёт к недоопределённости, отсутствие нижней — к неконтролируемому вычислительному уточнению.

4. Неразличимость условий

Примитив P4 (отношение неразличимости). Для заданного порога $\tau > 0$ условия X_1 и X_2 считаются неразличимыми, если

$$X_1 \sim_\tau X_2 \iff \mathrm{dist}\big(\overline{F}(X_1), \overline{F}(X_2)\big) \le \tau.$$

Отношение неразличимости определяется по последствиям в пространстве исходов и является более фундаментальным, чем любая метрика в пространстве условий $\mathcal{U}$. Разбиение пространства условий производится по различимости образов, а не по параметрическим расстояниям.

5. Разбиение множества условий

Примитив P5 (декомпозиция). Множество условий может быть разложено в дизъюнктное объединение

$$X = \bigcup_i X_i, \qquad X_i \cap X_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Разбиение считается допустимым только в том случае, если оно приводит к изменению структуры образа, то есть если $\overline{F}(X_i)$ различимы в смысле отношения $\sim_\tau$. Данное требование принципиально отличает предлагаемый подход от равномерных параметрических сеток.

6. Порядок на исходах

Примитив P6 (частичный порядок). В пространстве исходов $\mathcal{Y}$ задаётся частичный порядок

$$y_1 \preceq y_2,$$

интерпретируемый в соответствии с контекстом задачи (например, хуже/лучше, допустимо/недопустимо, доминирует/недоминирует).

Использование частичного порядка позволяет формулировать выводы без обращения к усреднённым или “репрезентативным” значениям.

7. Критерий остановки

Примитив P7 (стабилизация образа). Процесс разбиения множества условий X прекращается, если выполняется приближённое равенство

$$\bigcup_i \overline{F}(X_i) \;\approx\; \overline{F}(X),$$

и дальнейшее уточнение не приводит к появлению новых структур в пространстве исходов $\mathcal{Y}$.

Данный критерий обеспечивает конечность процедуры анализа и исключает неограниченное уточнение без изменения содержательных выводов.

4.3. Детекторы структуры в пространстве исходов

Формализуем детекторы структуры для дискретного набора наблюдений

$$(g_i, y_i), \qquad i = 1, \dots, N,$$

где

$$g_1 < \cdots < g_N, \qquad y_i \in \mathbb{R}^m.$$

Рассматриваемый набор интерпретируется как полный набор допустимых реализаций параметра g в рамках выбранной шкалы различимости. Анализ проводится без привлечения вероятностных предположений и без использования усреднённых значений в качестве репрезентативных.

Целью детекторов является выявление интервалов, в которых локальное уточнение шкалы параметра является содержательно оправданным.

Обозначения. Для соседних значений параметра вводятся приращения

$$\Delta g_i := g_{i+1} - g_i.$$

В скалярном случае ($m = 1$) определим дискретный наклон

$$s_i := \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta g_i}.$$

В случае $m > 1$ величина s_i является вектором, и анализ проводится покомпонентно либо с использованием частичного порядка.

Вводятся численные допуски:

$$\varepsilon_s \quad \text{(для наклонов)}, \qquad \varepsilon_c \quad \text{(для кривизны)}.$$

Эти параметры характеризуют численную различимость в рамках модели и не связаны с погрешностями измерения.

1. Детекторы монотонности ($m = 1$).

Строгая дискретная монотонность. Функция $y(g)$ дискретно неубывает, если

$$y_{i+1} - y_i \geq 0 \quad \forall i,$$

и невозрастает, если

$$y_{i+1} - y_i \leq 0 \quad \forall i.$$

Практический детектор. С учётом численного допуска монотонность считается выполненной, если

$$y_{i+1} - y_i \geq -\varepsilon_s \quad \forall i$$

(аналогично для невозрастающей зависимости).

Нарушение монотонности. Интервал $[g_i, g_{i+1}]$ помечается как подозрительный, если

$$(y_{i+1} - y_i)\,\sigma < -\varepsilon_s,$$

где $\sigma = +1$ соответствует ожиданию неубывания, $\sigma = -1$ — невозрастания. При отсутствии априорного тренда анализируется смена знака приращений.

Критерий локального уточнения. Если существуют $i < j$ такие, что

$$y_{i+1} - y_i > \varepsilon_s, \qquad y_{j+1} - y_j < -\varepsilon_s,$$

то фиксируется смена тренда и допускается наличие экстремума между соответствующими узлами, что служит основанием для локального уточнения шкалы параметра.

2. Детекторы выпуклости ($m = 1$).

На неравномерной сетке анализ проводится через наклоны s_i.

Дискретная выпуклость. Функция $y(g)$ выпукла, если

$$s_{i+1} - s_i \geq 0 \quad \forall i,$$

и вогнута, если

$$s_{i+1} - s_i \leq 0 \quad \forall i.$$

С учётом допуска:

$$s_{i+1} - s_i \geq -\varepsilon_c.$$

Смена выпуклости (инфлексия). Тройка узлов $(i, i+1, i+2)$ считается подозрительной, если

$$(s_{i+1} - s_i)\,(s_{i+2} - s_{i+1}) < -\varepsilon_c^2.$$

Параболический экстремум. Экстремум между g_i и g_{i+1} возможен, если

$$s_i > \varepsilon_s, \qquad s_{i+1} < -\varepsilon_s,$$

или наоборот, что соответствует наличию левой и правой ветвей.

3. Векторный выход ($m > 1$).

Покомпонентный детектор. Скалярные детекторы применяются к каждой компоненте $y^{(k)}$. Интервал считается подозрительным, если

$$\exists k : \ \mathrm{Flag}_k(i) = \mathrm{true}.$$

Детектор по частичному порядку (Pareto). Вводится порядок

$$y \preceq y' \iff \forall k : \ y^{(k)} \le y'^{(k)}.$$

Дискретная монотонность соответствует условию

$$y_i \preceq y_{i+1} \quad \forall i.$$

Несравнимость

$$\neg(y_i \preceq y_{i+1}) \ \wedge \ \neg(y_{i+1} \preceq y_i)$$

рассматривается как индикатор структурного или режимного перелома.

4. Детекторы режимов.

Пусть задан режимный предикат

$$P : \mathbb{R}^m \to \{0, 1\}.$$

Смена режима. Интервал $[g_i, g_{i+1}]$ является кандидатом на границу режима, если

$$P(y_i) \neq P(y_{i+1}).$$

Множественные режимы. Для набора предикатов $\{P_1, \dots, P_K\}$ вводится режимное состояние

$$R(y) := (P_1(y), \dots, P_K(y)) \in \{0, 1\}^K.$$

Смена режима фиксируется при

$$R(y_i) \neq R(y_{i+1}).$$

5. Подозрительные интервалы и правило уточнения.

Для каждого интервала $[g_i, g_{i+1}]$ вводятся флаги:

- $\mathrm{Flag}_{\mathrm{mode}}(i)$: $R(y_i) \neq R(y_{i+1})$;
- $\mathrm{Flag}_{\mathrm{mono}}(i)$: нарушение монотонности или смена знака приращений;
- $\mathrm{Flag}_{\mathrm{curv}}(i)$: нарушение или смена выпуклости;
- $\mathrm{Flag}_{\mathrm{pareto}}(i)$: несравнимость y_i и y_{i+1} ($m > 1$).

Правило уточнения формулируется следующим образом:

1. если $\mathrm{Flag}_{\mathrm{mode}}(i)$ — уточнение обязательно;
2. иначе, если $\mathrm{Flag}_{\mathrm{mono}}$, $\mathrm{Flag}_{\mathrm{curv}}$ или $\mathrm{Flag}_{\mathrm{pareto}}$ — уточнение допустимо локально;
3. иначе — уточнение не производится.

Замечание. Предложенные детекторы не доказывают отсутствия структуры между узлами сетки. Их назначение состоит в выявлении обоснованных поводов для локального уточнения. Уточнение производится исключительно в ответ на проявленную структуру в пространстве исходов $\mathcal{Y}$.

Алгоритм (псевдокод). Пусть задан дискретный набор узлов $\{g_i\}_{i=1}^N$ и соответствующие значения $y_i = f(g_i)$. Тогда процедура выявления интервалов для локального уточнения может быть записана в следующем виде:

```
for i = 1..N-1:
compute flags: Flag_mode(i), Flag_mono(i), Flag_curv(i), Flag_pareto(i)
if Flag_mode(i):      mark interval [g_i, g_{i+1}] for refinement (mandatory)
else if Flag_mono(i) or Flag_curv(i) or Flag_pareto(i):
mark interval [g_i, g_{i+1}] for refinement (optional)
return list of marked intervals
```

Сравнение с интервальным анализом. Интервальный анализ рассматривает параметр как непрерывный отрезок и распространяет операции на интервалы, получая гарантированную, но зачастую грубую верхнюю оболочку результата за счёт накопления консервативности (в частности, из-за зависимости переменных и раздувания оценок при композиции отображений). Предлагаемый подход не требует априорного предположения о непрерывности и работает с конечным пространством допустимых реализаций, выделяя локальные области для уточнения исключительно в ответ на проявленную структуру в пространстве исходов (смену режима, нарушение монотонности, смену выпуклости или несравнимость по частичному порядку). В этом смысле интервал используется как допустимая область, но не как универсальная форма представления неопределённости.

5. Отображение параметрического пространства в критериальное

Рассмотрим задачу отображения параметрического множества допустимых условий в пространство критериев. Пусть задано отображение

$$f : X \to Y,$$

где X — множество допустимых значений параметров, а Y — пространство исходов (критериев, режимов или их комбинаций).

Замечание (ограниченность линейного случая). В случае линейного и монотонного отображения интервального параметрического пространства в скалярный критерий границы критериального интервала вычисляются как значения функции на минимальной и максимальной вершинах параметрического гиперкуба. Вне этого узкого класса процедура вырождается в аппроксимацию worst-case / best-case и, в общем случае, не определяет точные границы критериального пространства.

Данное наблюдение фиксирует принципиальное ограничение всех методов, опирающихся на экстремальные значения параметров: вне линейно-монотонного класса они дают лишь гарантированную, но потенциально грубую оболочку образа.

5.1. Почему именно гиперкуб

В качестве базовой формы параметрического множества используется гиперкуб

$$X = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i].$$

Его выбор обусловлен не геометрической простотой, а совокупностью структурных и алгоритмических свойств.

Факторизация неопределённости. Гиперкуб естественным образом представляется в виде декартова произведения

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \qquad X_i = [a_i, b_i].$$

Это позволяет:

- дробить пространство по одному измерению;
- временно фиксировать слабочувствительные параметры;
- анализировать чувствительность по отдельным осям.

Каноническая иерархия разбиений. Для гиперкуба существует естественная и детерминированная схема уточнения: бинарные разбиения, структуры типа *kd-tree* или *octree*. Это обеспечивает алгоритмическую конечность процедуры без эвристического выбора формы ячеек.

Устойчивость к анизотропным отображениям. Практически все реальные отображения f обладают анизотропией: по одним направлениям пространство растягивается, по другим — сжимается. Гиперкуб сохраняет интерпретируемость при таких искажениях, в то время как изотропные формы (например, шары) быстро теряют информативность.

Совместимость с worst/best-case. Экстремальные значения критерия либо достигаются на вершинах гиперкуба, либо локализуются в процессе разбиения. Это не является строгой гарантией, но представляет собой осознанную и управляемую стратегию анализа.

5.2. Гиперкуб в логике диапазонного анализа

Важно подчеркнуть, что гиперкуб не является утверждением о структуре физического мира. Он используется как эпистемический инструмент.

Не предполагается, что:

- параметры ортогональны по своей природе;
- неопределённость изначально независима по координатам.

Предполагается лишь выбор базиса различимости, в котором параметры считаются независимыми до появления содержательных оснований утверждать обратное. Это минимальное и честное допущение.

5.3. Алгоритм построения образа множества

Пусть задано параметрическое множество

$$X = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i],$$

и отображение $f : X \to Y$. Рассмотрим следующую схему построения покрытия образа.

Инициализация.

$$\mathcal{C} := \{X\}.$$

Итерация. Для каждого $C \in \mathcal{C}$:

- вычислить верхнюю оболочку образа $\overline{Y}_C$;
- оценить её диаметр $\operatorname{diam}(\overline{Y}_C)$.

Если

$$\operatorname{diam}(\overline{Y}_C) \leq \tau,$$

то ячейка C сохраняется без дальнейшего разбиения. Иначе:

- выбирается координата i с наибольшей чувствительностью;
- ячейка C разрезается по координате i на два подгиперкуба;
- C заменяется полученными ячейками.

Процедура повторяется до стабилизации покрытия образа.

5.4. Принципиальные свойства подхода

В рамках данной схемы:

- не ищется *репрезентативная точка*;
- строится покрытие всего образа множества;
- критерий остановки формулируется в пространстве Y, а не в X.

Гиперкуб является минимальной структурой, позволяющей реализовать эти требования в явном алгоритмическом виде.

5.5. Ограничения и область применимости

Использование гиперкубов имеет известные ограничения:

- плохо выявляются узкие диагональные структуры;
- возможна избыточная ширина оболочки при сильных корреляциях параметров.

Однако такие ситуации диагностируются по росту ширины $\overline{Y}$. В ответ может быть применён поворот базиса или переход к более выразительным формам (например, зонтонам) после выявления соответствующей структуры. Ключевым является то, что искажение выявляется явно, а не маскируется усреднением.

Итог. Гиперкуб представляет собой минимальную параметрическую структуру, которая позволяет честно охватывать весь диапазон допустимых условий и при этом сохранять вычислительную управляемость процедуры анализа.

6. Обратное критериальное отображение и устойчивые области условий

До настоящего момента рассматривалось прямое отображение допустимых условий

$$F : X \to Y,$$

которое каждой области условий X сопоставляет множество возможных исходов $F(X) \subset Y$. Однако в реальных задачах анализа и идентификации существенным является обратный вопрос: какие условия в X совместимы с наблюдаемой или выявленной структурой в пространстве исходов Y.

Пусть $K \subset Y$ обозначает выделенную область в пространстве исходов, например:

- режимную зону;
- границу смены режима;
- Pareto–фронт;
- область немонотонности или структурного перелома.

Определение 2 (Обратный образ по критерию). *Для отображения $f : X \to Y$ определим оператор обратной допустимости*

$$B(K) := \{x \in X \mid f(x) \in K\}.$$

Множество $B(K)$ представляет собой область условий, совместимых с критериальной структурой K в пространстве исходов.

Оператор B не является обратной функцией в аналитическом смысле: в общем случае отношение между X и Y является многозначным (M:M), и множество $B(K)$ может быть несвязным, высокоразмерным и существенно недоопределённым.

Для получения устойчивых интерпретаций вводится дополнительный функционал устойчивости или “стоимости”

$$E : X \to \mathbb{R},$$

который может отражать, в зависимости от контекста, энергетическую, геометрическую, вычислительную или структурную предпочтительность условий.

Определение 3 (Область оптимально устойчивых условий). *Областью оптимально устойчивых условий, согласованных с критериальной структурой K, называется множество*

$$\mathcal{X}^*(K) := \mathrm{Argmin}_{x \in B(K)} E(x) = \{x \in B(K) \mid E(x) = \inf_{x' \in B(K)} E(x')\}.$$

В общем случае множество $\mathcal{X}^*(K)$ не обязано быть точкой: оно может представлять собой интервал, область или семейство эквивалентных по критерию реализаций. Тем самым оптимальность трактуется не как выбор “истинного” вектора параметров, а как операция замыкания области допустимых условий по выбранному функционалу устойчивости.

Замечание. Стандартные лагранжевы и ККТ–методы оптимизации возникают как частный случай данной схемы, когда множество $B(K)$ задаётся системой ограничений, а функционал E выбирается скалярным. В интервальном языке они интерпретируются как частные формы оператора фиксации, а не как онтологическое восстановление “реальных” значений параметров.

7. Матричное представление конечных множеств условий

Для практической реализации предложенного диапазонного формализма удобно использовать матричное представление конечных множеств условий. При этом матрица рассматривается не как объект линейной алгебры, а как компактная форма кодирования конечного множества сценариев.

7.1. Объекты

Определение 4 (Сценарная матрица). *Пусть $\mathcal{U}$ — пространство условий (обычно $\mathbb{R}^d$).* Сценарной матрицей *называется матрица*

$$S \in \mathcal{U}^{N \times d},$$

где каждая строка S_{i*} соответствует одному сценарию (одной допустимой реализации условий).

Сценарной матрице S сопоставляется конечное множество

$$[\![S]\!] := \{\, S_{i*} \mid i = 1, \ldots, N \,\} \subseteq \mathcal{U}.$$

Инвариант (семантика). Все операции над сценарными матрицами определяются через соответствующие множества $[\![S]\!]$, а не через линейную структуру матрицы S.

Определение 5 (Сценарный вектор). *Для одномерного параметра ($d = 1$) сценарная матрица вырождается в столбец*

$$g \in \mathbb{R}^{N\times 1},$$

который интерпретируется как конечное множество допустимых значений параметра.

7.2. Допустимые операции (алгебра сценариев)

Операции над сценарными матрицами интерпретируются как операции над конечными множествами условий.

7.2.1. Конструкции множеств условий

Объединение. Для сценарных матриц S и T операция объединения соответствует объединению множеств строк:

$$[\![\mathrm{Union}(S, T)]\!] = [\![S]\!] \cup [\![T]\!].$$

Пересечение.

$$[\![\mathrm{Inter}(S, T)]\!] = [\![S]\!] \cap [\![T]\!].$$

Разность.

$$[\![\mathrm{Diff}(S, T)]\!] = [\![S]\!] \setminus [\![T]\!].$$

7.2.2. Декартово произведение

Для независимых параметров, представленных сценарными матрицами $S \in \mathbb{R}^{N\times d_1}$ и $T \in \mathbb{R}^{M\times d_2}$, определяется операция произведения:

$$[\![\mathrm{Prod}(S, T)]\!] = [\![S]\!] \times [\![T]\!],$$

результатом которой является сценарная матрица размера $(NM) \times (d_1 + d_2)$. Данная операция обеспечивает полное покрытие комбинаций параметров без привлечения вероятностных предположений.

7.2.3. Отображение модели

Пусть задано отображение

$$f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}.$$

Отображение сценариев. Определяется операция

$$\mathrm{Map}_f(S) := \begin{pmatrix} f(S_{1*}) \\ \vdots \\ f(S_{N*}) \end{pmatrix},$$

где каждая строка соответствует результату применения модели к одному сценарию. Семантически выполняется

$$[\![\mathrm{Map}_f(S)]\!] = f([\![S]\!]).$$

7.2.4. Сводки по множеству

Следующие операции разрешены, однако их результат не является новым сценарием, а представляет собой характеристику множества.

Экстремумы. Для $Y \in \mathbb{R}^{N\times m}$:

$$\mathrm{Min}(Y),\ \mathrm{Max}(Y) \in \mathbb{R}^{1\times m}.$$

Прямоугольная оболочка.

$$\mathrm{Hull}_\square(Y) := [\,\mathrm{Min}(Y),\, \mathrm{Max}(Y)\,],$$

что задаёт верхнюю аппроксимацию множества исходов.

Парето-множество. При частичном порядке “не хуже по всем координатам” определяется множество недоминируемых элементов

$$\mathrm{Pareto}(Y) \subseteq [\![Y]\!].$$

7.2.5. Режимы и предикаты

Пусть задан предикат

$$P : \mathcal{Y} \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}.$$

Фильтрация сценариев.

$$[\![\mathrm{Filter}_P(S)]\!] = \{\, x \in [\![S]\!] \mid P(f(x)) = \mathrm{true}\,\}.$$

Кванторы.

$$\exists_P(S) := \exists x \in [\![S]\!] : \; P(f(x)), \qquad \forall_P(S) := \forall x \in [\![S]\!] : \; P(f(x)).$$

7.2.6. Уточнение без случайности

Разбиение. Если сценарии получены из ячеек (гиперкубов), допускается их детерминированное разбиение с последующей генерацией новых сценариев.

Обогащение. Для детерминированного правила Φ:

$$\mathrm{Enrich}(S, \Phi) := \mathrm{Union}(S, \Phi(S)).$$

Правило Φ не является вероятностным и зависит только от выявленной структуры образа.

7.3. Запрещённые операции

Следующие операции запрещены семантически, поскольку они интерпретируют сценарную матрицу как элемент векторного пространства:

- линейные комбинации сценариев $\alpha S + \beta T$;
- усреднение как замена множества одной точкой;
- нормы, скалярные произведения и спектральные разложения матриц сценариев.

Такие операции допустимы только при явном переходе к иной семантике (например, анализ данных), но не в рамках алгебры множеств условий.

7.4. Связь с образом множества

Сценарная матрица S является конечным представлением множества условий X. Операция $\mathrm{Map}_f(S)$ реализует конечное представление образа $F(X)$, а прямоугольная оболочка соответствует верхней аппроксимации $\overline{F}(X)$. Операции фильтрации и кванторов реализуют анализ в пространстве режимов, а процедуры `Split` и `Enrich` обеспечивают управляемую детализацию без полного перебора континуума.

Минимальный замкнутый набор. Для практического применения достаточно следующих операций:

$$\mathrm{Union},\ \mathrm{Prod},\ \mathrm{Map}_f,\ \mathrm{Filter}_P,\ \exists/\forall,\ \mathrm{Hull}_\square,\ \mathrm{Min}/\mathrm{Max},\ \mathrm{Enrich}.$$

Этого набора достаточно для реализации полной алгебры сценариев.

7.5. Ограничения точечного отображения и переход к областям

В завершение рассмотрим два принципиальных ограничения точечного отображения сценарных матриц, которые требуют явного исправления в рамках честного диапазонного анализа.

1. Проблема фиксации параметров по строкам.

Формула

$$\mathrm{Map}_f(S) := \begin{pmatrix} f(S_{1*}) \\ \vdots \\ f(S_{N*}) \end{pmatrix}$$

молча предполагает, что каждая строка S_{i*} представляет собой физически осмысленную фиксацию параметров.

Однако в диапазонной постановке задачи это предположение не обосновано. Параметры не являются фиксированными величинами, а каждая строка сценарной матрицы представляет собой лишь одну из возможных выборок из множества допустимых условий. Без дополнительной структуры такая строка не обладает привилегированным статусом по сравнению с любой другой.

В этом виде оператор Map_f корректен лишь в частных случаях:

- для крайних значений параметров (min/max);
- для заранее выделенных режимных или пороговых точек.

В общем случае точечное отображение представляет собой необоснованную дискретизацию диапазона.

Исправление. Для устранения данного ограничения необходимо изменить базовый объект отображения. Вместо интерпретации строки как точки вводится *ячейка условий*

$$C_i \subseteq \mathcal{U},$$

представляющая область допустимых значений параметров. Тогда корректным оператором является не точечное отображение, а отображение области:

$$\mathrm{Eval}_f(C_i) := \overline{f(C_i)},$$

где результатом является гарантированная оболочка образа области.

В этом подходе строки сценарной матрицы интерпретируются не как отдельные значения параметров, а как представления ячеек гиперкуба, областей неразличимости или режимных зон. Вопрос о «фиксации параметров» тем самым снимается: ничто не фиксируется, анализируется образ области.

2. Проблема декартового взрыва.

Наивное построение сценарной матрицы в виде полного декартова произведения

$$S = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$$

и последующее построчное применение Map_f приводит к экспоненциальному росту числа вычислений. Данное поведение не является дефектом реализации, а отражает принципиальную несостоятельность наивной дискретизации многомерных диапазонов.

Исправление. Ключевой сдвиг состоит в переходе от перебора комбинаций параметров к анализу режимов и границ последствий. Это достигается следующими приёмами.

(a) Подъём уровня анализа. Вместо вычисления $f(x)$ для отдельных точек x рассматривается образ целой области:

$$\overline{f([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])}.$$

Это один акт анализа вместо экспоненциального числа вызовов. Если полученная оболочка режимно однородна, уточнение не требуется; в противном случае разбиение выполняется только по критичным координатам.

(b) Декомпозиция по режимам. Разбиение пространства условий производится не по координатам как таковым, а по сменам режимов или предикатов в пространстве исходов. Внутри режимно однородных областей дальнейшее дробление запрещено.

(c) Адаптивное уточнение с жёстким критерием остановки. Процесс уточнения прекращается, когда стабилизируются:

- режимы;
- границы worst/best-case;
- множество достижимых исходов.

Остановка определяется в пространстве Y, а не по «мелкости» разбиения в X.

3. Исправленная формулировка отображения.

В минимальной корректной форме алгебра отображений должна быть переформулирована следующим образом:

$$\text{не } \mathrm{Map}_f : \text{точки} \to \text{точки}, \qquad \text{а } \mathrm{Eval}_f : \text{области} \to \text{оболочки исходов}.$$

Здесь областью является ячейка диапазона, а результатом — гарантированный коридор возможных исходов. Уточнение допускается исключительно в ответ на изменение режима или расширение границ последствий.

Итог. Точечная фиксация параметров и полный декартов перебор не являются реализацией диапазонного анализа, а представляют собой его вырождение. Корректный подход требует:

- замены точек областями;
- анализа образов областей, а не отдельных значений;
- адаптивного уточнения по структуре в пространстве исходов.

Эти условия не ослабляют формализм, а задают границы его корректного применения.

8. Замыкания: как возникают числа

Интервальный язык утверждает: “число” появляется не как первичная данность, а как след операции *замыкания* (и/или *стабилизации*) над интервалом допустимости.

Определение 6 (Оператор замыкания). *Оператором замыкания называется отображение*

$$\mathrm{cl} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

которое каждой области допустимости сопоставляет “замкнутую” область, удовлетворяющую выбранному критерию устойчивости/совместимости/фиксации.

Интуитивно: замыкание—это процедура, которая превращает “сырую” допустимость в “устойчивую” допустимость. В конкретных физических практиках роль cl может играть:

- процедура калибровки и эталонирования;
- фиксированный протокол измерения и обработки;
- ограничение на разрешение и стабильность прибора;
- структурные ограничения (например, периодичности фаз, топология).

Определение 7 (Число как след замыкания). *Числом фиксации величины x назовём любую выделенную точку $\hat{x} \in \mathrm{cl}(\mathcal{I}(x))$, выбранную функционалом фиксации ϕ:*

$$\hat{x} = \phi(\mathrm{cl}(\mathcal{I}(x)))\,.$$

Замечание 3. *Функционал ϕ может быть “центром” (midpoint), медианой, минимизатором функционала ошибки, точкой максимальной правдоподобности и т.п. Важен не выбор ϕ, а вторичность числа относительно $\mathcal{I}(x)$.*

Следствие 1 (Числа не являются базовым типом физического факта). *В интервальном языке физический факт фиксируется как $\mathcal{I}(x)$; любые точечные значения $\hat{x}$ являются производными следами выбранных операторов* cl *и ϕ.*

9. Замыкание как источник квантования

В традиционном языке физики квантование трактуется как первичный факт: величина “принимает дискретные значения”. Такая формулировка делает дискретность онтологической данностью и требует специальных постулатов для её объяснения.

В интервальном языке квантование переопределяется как следствие замыкания допустимости.

9.1. Квантование как эффект замыкания

Пусть физическая величина x характеризуется интервалом допустимости $\mathcal{I}(x)$, который определяется условиями реализации и совместимости. Предположим, что для x существует оператор замыкания cl такой, что:

$$\mathrm{cl}(\mathcal{I}(x)) = \bigsqcup_{k \in K} \mathcal{I}(x)_k \,,$$

где $\{\mathcal{I}(x)_k\}$ — конечное или счётное семейство *устойчивых* компонент допустимости, не допускающих непрерывного перехода друг в друга без нарушения условий совместимости.

Определение 8 (Квант замыкания). *Компонента $\mathcal{I}(x)_k$ называется* квантом замыкания*, если:*

1. *она устойчива относительно повторного применения* cl*;*
2. *переход между $\mathcal{I}(x)_k$ и $\mathcal{I}(x)_{k'}$ невозможен без выхода за пределы $\mathcal{I}(x)$.*

В этом случае численные "квантованные значения" возникают как следы функционала фиксации ϕ,

$$\hat{x}_k = \phi(\mathcal{I}(x)_k) \,,$$

а дискретность индекса k отражает не дискретность "вещи самой по себе", а структуру замыкания допустимости.

Следствие 2 (Дискретность как вторичный эффект). *Если интервалы допустимости величины распадаются на устойчивые компоненты при замыкании, то любые процедуры фиксации порождают дискретный спектр значений. Обратное неверно: наличие дискретных чисел не требует дискретной онтологии величины.*

9.2. Минимальные циклы и фазовые замыкания

Особый класс замыканий возникает, когда допустимость задаётся циклическими условиями совместимости. Пусть параметр θ принадлежит интервалу фазовой допустимости $\mathcal{I}(\theta)$, а условие совместимости требует замыкания при кратности некоторого минимального цикла:

$$\theta \sim \theta + n\,\Theta_0.$$

Тогда допустимость замыкается не точкой, а классом эквивалентности, и дискретный индекс n возникает как счётчик замыканий.

Замечание 4. *В этом смысле числовые "квантовые числа" являются следами топологии замыкания допустимости, а не первичными метками состояний.*

9.3. Отрицание онтологической дискретности

Интервальный язык позволяет сформулировать жёсткое отрицание распространённой онтологической ошибки:

> Квантование не означает, что величина принимает дискретные значения; оно означает, что допустимость реализации замыкается на устойчивые компоненты.

Дискретность относится к *структуре замыкания*, а не к *природе величины*. Между компонентами допустимости отсутствует непрерывная совместимость, но внутри каждой компоненты реализация остаётся интервальной.

Следствие 3 (Квантование без постулатов). *Квантование может быть получено без введения специальных дискретных постулатов, если допустимость величины обладает нетривиальной структурой замыкания.*

9.4. Число как след, а не причина

Таким образом, числа, возникающие в квантованных спектрах, не являются причиной устойчивости или различимости состояний. Они являются следами:

- замыкания допустимости;
- выбранной процедуры фиксации;
- устойчивости компонент совместимости.

Попытка онтологизировать числа приводит к ложным вопросам о "происхождении дискретности". В интервальном языке эти вопросы снимаются на синтаксическом уровне: дискретность возникает не *в мире*, а *в результате замыкания языка допустимости.*

9.5. Итог

> Квантование есть не свойство величины, а свойство замыкания допустимости.

Это утверждение не отменяет существующих формализмов и численных спектров, но меняет их онтологический статус: числа перестают быть фундаментом и становятся следами структурной стабилизации.

10. Переопределение ключевых понятий

10.1. Параметр

Было: параметр = число.
Становится: параметр = интервал допустимых реализаций.

Число становится:

- либо точкой фиксации внутри $\mathrm{cl}(\mathcal{I}(x))$;
- либо маркером стабилизации (фиксированной процедуры);
- либо следом замыкания в конкретном контексте.

10.2. Закон природы

Было: $F = ma$.
Становится: *соотношение совместимости интервалов.*

Если $m \in \mathcal{I}(m)$ и $a \in \mathcal{I}(a)$, то допустимые значения F задаются оператором композиции допустимостей:

$$F \in \mathcal{I}(F) = \mathcal{I}(m) \circ \mathcal{I}(a)\,,$$

где $\circ$—оператор согласования (в простейшем случае: интервальное произведение).

Следствие 4 (Законы как операторы допустимости). *В интервальном языке закон природы задаёт не равенство чисел, а оператор, который переводит совместимые интервалы входных величин в интервал допустимости выходной величины.*

10.3. Квантование

Было: величина принимает дискретные значения.
Становится: интервал допустимости замыкается минимальным циклом/условием совместимости, а "дискретность" является следом этого замыкания.

Замечание 5. *В этой статье квантование рассматривается как синтаксический факт: дискретность возникает как устойчивый класс совместимых реализаций при замыкании допустимости, а не как первичная "таблица чисел".*

10.4. Константа

Было: константа = фиксированное число.
Становится: константа = устойчивый интервал, инвариантный при изменении контекста в пределах класса применимости.

Иными словами, константа—это "коридор", переживающий смену реализаций и приборов; точечное значение—частный след фиксации.

11. Электрон в новом языке (коротко)

Не: "точечная частица с массой m_e".
А: локальность, реализующая:

- минимальный интервал электромагнитного участия;
- устойчивый интервал массы;
- замыкаемые режимы когерентности (как условия совместимости).

Точечность здесь означает: отсутствие разрешаемой внутренней структуры в данном контексте измерения, а не отсутствие онтологической "толщины".

12. Пространство и время

12.1. Пространство

Не: множество точек.
А: сеть перекрывающихся интервалов локальности.

> Точка есть пересечение (и/или предел замыкания) интервалов локальности.

12.2. Время

Не: параметр t как "точка времени".
А: интервал между фиксациями (границами допустимости).

> Момент времени есть фиксация границы интервала.

13. Измерение

Было: измерение определяет значение.
Становится: измерение выбирает точку внутри интервала.
Формально: прибор реализует функционал фиксации ϕ над $\mathrm{cl}(\mathcal{I}(x))$:

$$\hat{x} = \phi(\mathrm{cl}(\mathcal{I}(x)))\,.$$

Разные приборы и протоколы дают разные ϕ и/или разные cl, тем самым выбирая различные точки (или различные замыкания) *одного и того же* интервала допустимости.

Следствие 5 (Различие измерений как различие функционалов фиксации). *Если две измерительные практики задают различные пары* (cl_1, ϕ_1) *и* (cl_2, ϕ_2)*, то их численные результаты не обязаны совпадать, оставаясь совместимыми с одной и той же онтологической допустимостью* $\mathcal{I}(x)$*.*

14. Почему это не ломает физику

В интервальном языке:

- уравнения остаются (как частные формы операторов совместимости);
- числа остаются (как следы фиксации и замыкания);
- вычислительная практика сохраняется.

Меняется только статус числа: из "онтологического факта" оно переходит в эпистемический след замыкания допустимости.

15. Почему это снимает псевдопроблемы

Интервальный синтаксис убирает (или радикально пересобирает) такие узлы, как:

- "тождественность частиц" (как вопрос о точечном совпадении параметров);
- "почему константы такие точные" (как вопрос о точке вместо коридора);
- "точечность vs поле" (как спор о первичности формы представления);
- "дискретное vs непрерывное" (как спор о числах вместо замыканий).

16. Минимальный словарь

- интервал допустимости $\mathcal{I}(x)$
- замыкание cl
- фиксация ϕ
- реализация
- локальность (как интервал участия)
- граница интервала
- совместимость/оператор допустимости

17. Финальная формула

> *Физика описывает не значения, а допустимые области. Значения возникают тогда, когда области замыкаются.*

Данная формула выражает не метафору, а структурный факт, который неявно присутствует в большинстве физических теорий и вычислительных практик.

17.1. Область как первичный объект физического описания

В реальных физических задачах параметры и величины редко заданы в виде точных числовых значений. На практике они всегда определяются через:

- диапазоны допустимости;
- допуски измерения;
- интервалы существования;
- области устойчивости или реализуемости.

Даже в тех случаях, когда используется точечная нотация, она, как правило, выступает лишь как удобная запись для представления области, сжатой до одного значения в результате дополнительных допущений (идеализации, симметрии, калибровки, выбора режима).

Таким образом, базовым объектом физического описания является не число, а множество допустимых реализаций величины.

17.2. Что означает “замыкание” в физическом смысле

Под замыканием области понимается не формальный предельный переход, а операция, в результате которой множество допустимых состояний перестаёт различаться в рамках выбранного языка описания.

Замыкание может происходить по разным причинам:

- из-за ограниченной разрешающей способности измерений;
- вследствие устойчивости режима (внутри которого различия несущественны);
- в результате симметрий или законов сохранения;
- при достижении критерия остановки в анализе последствий.

В этом смысле числовое значение не является первичным фактом, а возникает как *инвариант замкнутой области*, то есть как характеристика множества, которое больше не требует дальнейшего уточнения для рассматриваемых целей.

17.3. Связь с классическим формализмом

Классическая физика традиционно использует точечные значения величин, однако эта точечность является результатом молчаливого замыкания допустимых областей.

Например:

- константы считаются точными, поскольку их допустимые диапазоны лежат ниже порога различимости;
- траектории описываются как функции времени, поскольку отклонения внутри устойчивого режима игнорируются;
- параметры среды фиксируются, когда вариации не влияют на качественное поведение системы.

Предлагаемый язык не отрицает классический формализм, а делает явным тот шаг, который в нём обычно выполняется неявно.

17.4. Следствие для вычислений и моделирования

В вычислительных моделях числовые значения возникают не как фундаментальные элементы, а как результат:

- анализа образа области условий;
- выявления режимной однородности;
- стабилизации границ последствий.

До момента такого замыкания корректным объектом анализа является не отдельная точка, а диапазон допустимых значений и его образ в пространстве исходов. Попытка преждевременно заменить область одной точкой приводит либо к потере режимов, либо к неконтролируемой чувствительности результатов.

17.5. Интерпретация

Финальная формула может быть прочитана следующим образом:

- физический закон задаёт пространство допустимых реализаций;
- измерение, расчёт или режим приводят к замыканию этого пространства;
- числовое значение является вторичным и контекстно-зависимым.

В этом смысле физика оперирует не "истинными значениями", а устойчивыми областями, а числа выступают как компактные обозначения для замкнутых допустимых диапазонов.

Итог. Число в физике — это не исходная сущность, а результат замыкания допустимой области в выбранном языке описания.

A. Toy example: локальное уточнение по структуре в Y без вероятностей

Ниже приведён минимальный пример, демонстрирующий полный цикл *“X (диапазон) $\to$ Y (исходы) $\to$ детекторы структуры $\to$ уточнение $\to$ остановка”* без апелляции к вероятностям и без выбора “репрезентативной точки”.

A.1. Постановка

Рассматривается двумерное пространство условий $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ с параметрами

$$x = (g, \mu),$$

где g и μ трактуются как независимые параметры в выбранном базисе различимости. Начальная допустимая область задаётся гиперкубом

$$X = [9.78,\ 9.82] \times [0.20,\ 0.24].$$

Для простоты берём дискретные шкалы (сценарные векторы)

$$G = \{9.78,\ 9.80,\ 9.82\}, \qquad M = \{0.20,\ 0.22,\ 0.24\}.$$

Полное покрытие начальной области (в смысле независимых параметров) задаётся декартовым произведением:

$$[\![S]\!] = G \times M,$$

где S — сценарная матрица из $N = |G||M| = 9$ строк вида (g_i, μ_j).

A.2. Модель и критерии

Пусть модель возвращает скалярный критерий (например, “запас устойчивости”)

$$y = f(g, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Чтобы в примере было видно *и* режимную границу, *и* немонотонность, зададим простую (но показательно “плохую”) модель:

$$f(g, \mu) := (g - 9.80)^2 + (\mu - 0.22) - 0.0002.$$

Эта функция:

- имеет минимум по g вблизи $g = 9.80$ (“левая и правая ветви”);
- линейна по μ;
- пересекает порог 0 внутри области X.

Режимный предикат (например, “допустимо/недопустимо”) определим как

$$P(y) := \big(y \le 0\big).$$

A.3. Шаг 1: вычисление исходов на сценариях

Вычисляем

$$Y = \mathrm{Map}_f(S) \in \mathbb{R}^{9\times 1}, \qquad y_{ij} = f(g_i, \mu_j).$$

Для ориентира (численно):

$$(g-9.80)^2 = \begin{cases} 0.0004, & g = 9.78 \text{ или } 9.82, \\ 0, & g = 9.80, \end{cases} \qquad (\mu - 0.22) \in \{-0.02,\ 0,\ 0.02\}.$$

Значит, например:

$$f(9.80, 0.20) = -0.0202 < 0 \Rightarrow P = \text{true}, \qquad f(9.82, 0.24) = 0.0202 > 0 \Rightarrow P = \text{false}.$$

Уже на грубой сетке видна смена режима.

A.4. Шаг 2: детекторы структуры в Y и пометка “подозрительных” областей

(A) Детектор режимной границы. Сетка задаёт разбиение X на ячейки (клетки) между соседними узлами. Ячейка C помечается, если режим меняется на её углах:

$$\mathrm{Flag}_{\mathrm{mode}}(C) = \text{true} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x, x' \in V(C):\ P(f(x)) \ne P(f(x')),$$

где $V(C)$ — множество вершин ячейки. В данном примере такие ячейки существуют в окрестности $g \approx 9.80$ и $\mu \approx 0.22$.

(B) Детектор “двух ветвей” по g (немонотонность). Фиксируя $\mu = \mu_j$ и рассматривая сечение $g \mapsto f(g, \mu_j)$ на узлах G, можно проверить смену тренда. Например, при $\mu = 0.22$:

$$f(9.78, 0.22) = 0.0002, \quad f(9.80, 0.22) = -0.0002, \quad f(9.82, 0.22) = 0.0002,$$

то есть наблюдается “U-образная” структура (лево/право выше, середина ниже), что является поводом для локального уточнения по g в окрестности 9.80.

A.5. Шаг 3: локальное уточнение (refinement)

Уточнение выполняется *только* для тех ячеек C, где сработали флаги. Например, для ячейки

$$C = [9.78, 9.80] \times [0.20, 0.22]$$

можно выполнить разбиение по наиболее “чувствительной” координате. В данном toy-примере чувствительность по g проявляет кривизну, поэтому выбираем g и делим пополам:

$$C \mapsto C_1 \cup C_2, \qquad C_1 = [9.78, 9.79] \times [0.20, 0.22], \quad C_2 = [9.79, 9.80] \times [0.20, 0.22].$$

Затем добавляем детерминированные новые узлы (например, середины) и пересчитываем f:

$$G \leftarrow G \cup \{9.79\}, \quad \text{или локально } S \leftarrow \mathrm{Enrich}(S, \Phi),$$

где Φ добавляет midpoints только в помеченных ячейках.

A.6. Шаг 4: критерий остановки

Пусть для каждой помеченной ячейки C строится верхняя оболочка исходов (в простейшем варианте — по значениям на вершинах):

$$\overline{Y}_C := \mathrm{Hull}_{\square}\big(\mathrm{Map}_f(V(C))\big).$$

Остановка осуществляется по критерию стабилизации в Y:

$$\max_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{diam}(\overline{Y}_C) \leq \tau \quad \text{и} \quad \text{при уточнении не появляется новых смен режима } P.$$

Здесь τ задаёт требуемую разрешающую способность по критерию (а не по параметрам).

A.7. Итог интерпретации

В данном примере:

- грубая сетка уже выявляет *режимную границу* $P(y)$;
- детектор немонотонности по g указывает, где уточнение имеет смысл;
- уточнение выполняется локально (вокруг структуры в Y), а не глобально;
- остановка задаётся в пространстве исходов, а не по “мелкости” шага в X.

Тем самым toy-пример иллюстрирует основной тезис работы: *диапазонная постановка требует анализа образа областей и управляемого уточнения, порождаемого структурой в Y, а не априорной дискретизацией в X.*

Список литературы

[1] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit и É. Walter, *Applied Interval Analysis*. London: Springer, 2001.

[2] JCGM, *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*, Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 100:2008, 2008.

[3] E. Kaucher, *Interval Analysis in the Extended Interval Space*. Berlin: Springer, 1980.

[4] R. E. Moore, R. B. Kearfott и M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial и Applied Mathematics, 2009.

[5] А. А. Неклюдов, *Философия Дискретного Бытия. Манифест*, Zenodo, DOI: 10.5281/zenodo.17572909, 2025.